Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι – 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(1) Εκφράστε τους μιγαδικούς αριθμούς:

i) $(i+1)(2-i)$ ii) $(i+1)(2-i)(-i)+7$

iii) $(-1+3i)^{-1}$ iv) $(1-i)^{15}$ v) i^{-1}

σε αλγεβρική μορφή.

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(2) Δίνεται μιγαδικός $z = \lambda + \mu i - 2 - i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Προσδιορίστε τα λ & μ ώστε

i) $z = 0$ ii) $z = 2i$ iii) $z = 5$.

(3) i) Υπολογίστε το i^n για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$.

ii) Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} i^k \quad \& \quad \Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}\left(\frac{i}{k}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

iii) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$A = i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025}$$

(4) Περιγράψτε το σύνολο των σημείων

$z \in \mathbb{C}$ για τα οποία:

i) $|z-i+3|=5$ iii) $|z-2|=|z+2-i|$

ii) $\sqrt{3}|z+2|=|z-2|$ iv) $2<|z+2-2i|<8$.

(5) i) Αν $|z+|z||+|z-|z||=2|z|$, να δείξετε ότι $Im(z)=0$.

ii) Αν $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, να δείξετε ότι $Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=0$, αν $z_2\neq 0$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(6) Δείξτε ότι τα σύνολα

$A=\{z\in\mathbb{C} : |z-1|<|z+1|\}$ και

$B=\{z\in\mathbb{C} : Re(z)>0\}$ είναι ίσα.

(7) Έστω $A, C\in\mathbb{R}$ & $B\in\mathbb{C}$ τ.ω $|B|^2>A\cdot C$

Ν.δ.ο το σύνολο

$G=\{z\in\mathbb{C} : A|z|^2+2Re(Bz)+C=0\}$

παριστάνει:

i) Ευθεία $\Leftrightarrow A=0$, ii) Κύκλο $\Leftrightarrow A\neq 0$

(8) Ποιο το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα των μιγαδικών αριθμών

$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = 2-2i$, $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z_4 = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$, $z_5 = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

(9) Ποιο το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z έτσι ώστε:

i) $Arg(iz+1) = \pi$, ii) $\frac{\pi}{4} \leq Arg z \leq \frac{3\pi}{4}$

iii) $Arg(2z+i) = -\frac{\pi}{4}$, iv) $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$

v) $|Arg(z-i)| < \frac{\pi}{6}$, vi) $Arg(1-z-z^2) = \frac{\pi}{2}$

vii) $|z+2i| = |z+4i|$ & $Arg(z+4i) = \frac{\pi}{2}$.

(10) Να γραφούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί σε αλγεβρική μορφή.

i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$ ii) $\frac{(\sqrt{3}-i)^7}{(1+i)^{10}}$ iii) $(\sqrt{3}+i)^{99}$

iv) $(1-i)^{2023}$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(11) Υπολογίστε μέσω του τύπου De Moivre τους αριθμούς $\cos(3\alpha)$ & $\sin(3\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(12) i) Αληθεύει ότι $Arg(z^4) = 4 \cdot Arg\, z$;

ii) Αληθεύει ότι $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg\, z_2$;

iii) Αν $Arg\, z_1, Arg\, z_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, αληθεύει ότι

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \;;$$

(13) Υπολογίστε την $\sqrt[4]{-3\sqrt{3} - 3i}$ και όλους τους κλάδους της

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(14) Επιλύστε τις εξισώσεις:

i) $z^2 + 64 = 0$, ii) $z^2 - z + 1 = 0$

iii) $z^3 = -i$, iv) $z^6 - (1+i)z^3 + i = 0$

v) $z^2 - (3+i) \cdot z + 4 + 3i = 0$

(15) α) Αφού επιλύσετε την εξίσωση $z^\nu = 1$, υπολογίστε το άθροισμα και το

γινόμενο των ριζών της

β) Νδο $\forall n \in \mathbb{N}$:

i. $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

ii. $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$

(16) Αν $z, w \in \mathbb{C}$, αποδείξτε ότι

$$e^{z} = e^{w} \iff z - w = 2k\pi i \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

(17) Υπολογίστε τους λογαρίθμους :

α) $\log(-1)$, β) $\log(i\pi)$, γ) $\log(\sqrt{3} - i)$

δ) $\log\left(\log(1+i)\right)$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(18) Υπολογίστε τις δυνάμεις

α) $(-1)^{i}$, β) $(\sqrt{2})^{i\sqrt{3}}$, γ) $(1+i)^{2+i}$

δ) $(e^{i})^{e^{i}}$

(19) i) Νδο $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{και} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ii) Ορίζουμε $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ και

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

α) Ν.δ.ο $\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$

β) Ν.δ.ο $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

και $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

γ) Επιλύστε την εξίσωση:

$$\sin(z - i) = 1.$$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(20) Επιλύστε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2} \cdot e^{z} = 1 + i$ β) $e^{z^2} = i$

γ) $z^{i} = e^{\pi/2}$ δ) $i^{z} = e^{\pi/2}$

ε) $e^{z} - e^{-z} = 2i$

(21) Να βρείτε το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο της κάθε συνάρτησης.

i) $f(z) = z^3 \cdot \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}$

ii) $f(z) = iz - \bar{z} + 3 - i, \quad z \in \mathbb{C}$

iii) $f(z) = e^{\bar{z}} \cdot \log z, \quad z \in \mathbb{C}^*$

iv) $f(z) = 2i \cdot \sqrt[3]{z} \cdot Arg(z)$, $z \in \mathbb{C}^*$

(22) Αν $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ & $A = \{z : 0 < |z| < 1\}$

νδο $f(A) = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$.

(23) Αποδείξτε ότι η $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$

είναι 1−1.

(24) Έστω $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ και ορίζουμε τα

σύνολα $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0$ & $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2}\}$

$H = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Arg\, z \leq \frac{\pi}{2}\}$ & $\bar{D}(0,1) = \{z : |z| \leq 1\}$

α) Σχεδιάστε τα παραπάνω σύνολα στο επίπεδο

β) ΝΔο $f(D) = H \cap \bar{D}(0,1)$

(25) Έστω $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$ και ορίζουμε

τα σύνολα $A = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|\}$

και $A^* = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$

α) Σχεδιάστε τα παραπάνω σύνολα στο επίπεδο

β) ΝΔο $f(A) = A^*$